Catania, 3 dicembre 2015

Dalle Superiori all'Università: orientamento e test d'ingresso, problemi di linguaggio, metodo di studio

Claudio Bernardi
Dipartimento di Matematica - *Sapienza*, Università di Roma

prove curricolari e prove non curricolari

C'è una netta differenza fra:

- una prova scritta durante lo svolgimento di un curriculum, o a conclusione di un ciclo di studi; una prova di questo tipo deve essere in larga misura *prevedibile*, perché lo studente deve ritrovare quello che ha studiato;
- e una prova di accesso, o un test iniziale, o una gara di matematica,
  che contengono domande generali, volutamente poco prevedibili.

Penso sia molto opportuno abituare gli studenti anche alle prove non curricolari e ai test (occasioni: primo livello gare di matematica, prove Invalsi, ecc.).

il «*problem solving*»

Secondo David Tall, molti studenti, invece di impegnarsi con un obiettivo («*goal*»), hanno solo un «*antigoal*», cioè tendano unicamente ad evitare il peggio. Un possibile (piccolo) rimedio, consiste nel proporre ogni tanto problemi che non sono un'applicazione diretta di quanto studiato. Nel *problem solving*,

- si presentano problemi non strettamente legati al curriculum;
- non c'è una risoluzione standard, non sappiamo a priori quale strumento va applicato, non si arriva al risultato con procedimenti automatici;
- contrariamente ad una (cattiva) abitudine scolastica, ci sono problemi che ammettono più soluzioni, o che non ammettono alcuna soluzione;
- si può sbagliare (anche il docente!).

È preferibile che i problemi siano affrontati dagli studenti singolarmente o a gruppi? È opportuno che attività di *problem solving* rientrino nella valutazione? Iniziative in questa direzione, se sapientemente condotte, possono avere effetti positivi per varie tipologie di studenti. Spesso gli *errori* possono essere utilmente sfruttati come occasioni di approfondimento.

Un domanda per noi docenti. Quante volte siamo disposti a parlare con gli studenti di un problema di cui non sappiamo la soluzione? Questo atteggiamento, fra l'altro, favorisce l'idea di una matematica in cui non ci sono problemi aperti.

A chi si occupa di gare di matematica capita di non riuscire a risolvere un esercizio. (Per inciso, non sempre ci fanno piacere domande ed obiezioni da parte degli studenti bravi, magari un po' rompiscatole ...)

poche parole sull'orientamento

Riporto qualche dato recente dalla *Sapienza*, Università di Roma.

corso	*immatricolati* 2015	*iscritti* 2016 *con almeno* 30 *crediti su* 60
Biologia	271	82
Chimica	339	73
Matematica	173	82

Come tutti i dati, anche i precedenti devono essere interpretati. In particolare, ci sono studenti che si iscrivono a Chimica con l'intenzione di passare a Medicina.
È del tutto sconsigliabile rincorrere per anni l'ingresso ad un corso di laurea a numero chiuso.
Raccomandazioni. Per la scelta del corso di laurea approfittare delle numerose occasioni di orientamento. Informarsi con cura (i nomi delle lauree sono spesso simili). Scegliere *quello che piace*, senza farsi influenzare troppo da consigli, dai "si dice", e nemmeno da previsioni sulla possibilità di trovare posti di lavoro.
Il primo anno universitario è duro.
Conviene *studiare insieme ad altri*. Conviene *parlare con i docenti*, senza paura!
Attenzione alle scadenze, alla data di inizio delle lezioni, ecc.

la paura della matematica

Nel 1996 era stato assegnato alla Maturità Scientifica un tema su «Matematica e Poesia». Riporto brani tratti da temi (da un libro curato dall'IRRSAE Toscana).
«*L'argomento matematica rimane, al di là di tutto, lo spauracchio, l'incubo più terribile del popolo studentesco italiano.*»
«*Un lucido ed inquietante panico, una febbrile e autentica paura [...] niente a che fare, quindi, per quanto mi riguarda, con il sublime ed il meraviglioso.*»
«*Quando riesco a risolvere un teorema o un'equazione provo un velato ma inebriato senso di appagamento. Ciò è per me un modo di crescere, di credere sempre di più nelle mie possibilità [...] il vero momento di maturazione lo provo di fronte a un problema di cui, inizialmente, non riesco a trovare la soluzione.*»
Si tratta di condurre lo studente ad un atteggiamento consapevole delle difficoltà, ma non rinunciatario. È purtroppo frequente, al contrario, la paura che "blocca" e rende passivi.
"*Non abbiate paura*" (Giovanni Paolo II, 1978)

Se da un lato è sempre consigliabile la prudenza, al contempo i sensi di apprensione, di smarrimento e di ansia possono costituire una causa di insicurezza e quindi di insuccesso.
La paura a scuola è frequente per tutte le materie (paura di un insegnante, di un esame, ...); ma in matematica per alcuni c'è paura non solo a livello di emozione in circostanze specifiche, ma come atteggiamento continuo di insicurezza.
In altre materie è più facile trovare scusanti per un voto negativo (il tema che ho svolto mi piace: è l'insegnante che non l'ha capito). Ma in un esercizio di matematica c'è un risultato oggettivo, e chi non trova *quel* risultato sbaglia.

qualche altra indicazione per i docenti alle Superiori
Qualche volta, forse, si può *chiedere di più* agli studenti delle Secondarie, come impegno, come compiti a casa ecc. Si tratta di trovare motivazioni, proporre ricerche, ecc.
Gli studenti devono imparare, fra l'altro, a
- *studiare* su libri e su appunti
- *leggere* il testo di un problema ed eventuali suggerimenti
- rispondere a domande di *comprensione del testo*: non sono facili (anche quelle tratte dalla prova Invalsi alla fine del primo esame di Stato).

In *analisi matematica*, la cosa fondamentale è imparare a collegare il formalismo matematico con i grafici: è molto importante la capacità di tradurre informazioni in un grafico e, viceversa, di leggere un grafico.

Alle Superiori molti insegnanti hanno paura di ricorrere a *modelli concreti*, ad esempio di carta, nello studio della geometria e, più in generale, evitano ogni forma di gioco. Viceversa, nella Scuola Secondaria di I grado, capita di aver paura di assegnare un problema astratto e, talvolta, di introdurre una forzatura per rendere concreto l'enunciato. In entrambi i casi, mi permetto un suggerimento: non è opportuno insegnare sempre nello stesso modo; un insegnante deve saper essere, a seconda delle circostanze, *concreto o astratto*, *formale o intuitivo*.

logica e linguaggio
Anche in matematica il linguaggio è ambiguo. Vediamo un esempio.
L’articolo «*un*» spesso significa «*ogni*» (come in «*la somma degli angoli di un triangolo è un angolo piatto*»),
Confrontiamo le due frasi seguenti, formalmente molto simili fra loro:

«*il quadrato di un numero pari è pari*»
«36 *è il quadrato di un numero pari*».

L’ultima frase significa: esiste un numero pari il cui quadrato è 36.
Chiarire la frase «<u>un</u> numero pari ammette sempre <u>una</u> metà».

Anche la congiunzione «*e*» ha più significati. Ad esempio, nella frase
«3 *e* 7 *sono numeri primi*» siamo in presenza del connettivo *congiunzione*, che congiunge le due affermazioni «3 *è primo*» e «7 *è primo*».
Ma nella frase «8 *e* 15 *sono primi fra loro*» la «*e*» serve solo per collegare i due soggetti che, insieme, godono ella proprietà citata. Altri esempi:

- 10 è pari <u>e</u> 11 è dispari
- 12 <u>e</u> 42 hanno la stessa cifra delle unità
- 12 <u>e</u> 42 sono multipli di 3
- le rette *a* <u>e</u> *b* sono perpendicolari

Se vinco al Lotto, allora divento ricco.
Questa frase è discutibile per varie ragioni, ma supponiamo che la frase sia vera. Se sono ricco, è sicuro che abbia vinto al Lotto? No, non è detto, perché potrei, ad esempio, avere ricevuto una cospicua eredità. Se invece non sono ricco, allora è sicuro che non ho vinto al Lotto (se avessi vinto al Lotto, sarei diventato ricco).

In generale, consideriamo l'implicazione

(a) $p \rightarrow q$

e costruiamo le due implicazioni

(b) $q \rightarrow p$ *inversa* di (a)

(c) non q $\rightarrow$ non p *contronominale* di (a)

In generale, l'inversa di una implicazione si ottiene scambiando l'ipotesi con la tesi; invece, l'implicazione contronominale di una implicazione si ottiene negando sia l'ipotesi sia la tesi, e scambiandole fra loro.

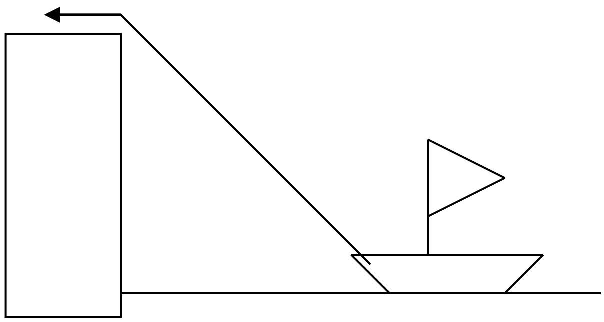
Se l'implicazione $p \rightarrow q$ è vera, allora è sempre vera anche l'implicazione contronominale non q $\rightarrow$ non p.
Invece, se sappiamo $p \rightarrow q$ è vera, non possiamo concludere che è vera l'inversa $q \rightarrow p$ (in alcuni casi è vera, in altri è falsa).
Ad esempio:
«se un numero *n* è un multiplo di 4, allora *n* è pari» (vera)
«se *n* non è pari, allora *n* non è multiplo di 4» (vera)
«se un numero *n* è pari, allora *n* è un multiplo di 4» (l'inversa è falsa).

di fronte a un problema (problemi adatti per una sessione di *problem solving*)

1. Un foglio di carta formato A4, piegato opportunamente in due, forma un rettangolo simile a quello di partenza. Trovare il rapporto fra il lato più lungo e quello più corto.
[Può capitare che uno studente non sappia che cosa sia il "formato A4"; ma la conoscenza di questa sigla non è richiesta per la risoluzione.]

2. Due persone sono nate in anni diversi, ma festeggiano il compleanno lo stesso giorno. Se la somma delle loro età attuali è dispari, negli anni futuri la somma delle loro età sarà pari o dispari? E il prodotto?
Se il prodotto delle loro età attuali è dispari, negli anni futuri la somma delle loro età sarà pari o dispari?

3. Una barca è collegata al molo da una fune tesa. Tiriamo la fune di 1 m verso l'interno (a sinistra in figura); di quanto si sposta la barca, avvicinandosi al molo? Di più, di meno, o esattamente di 1 m ?
(*Il problema, non banale, è tratto dal quotidiano francese* Le Monde).



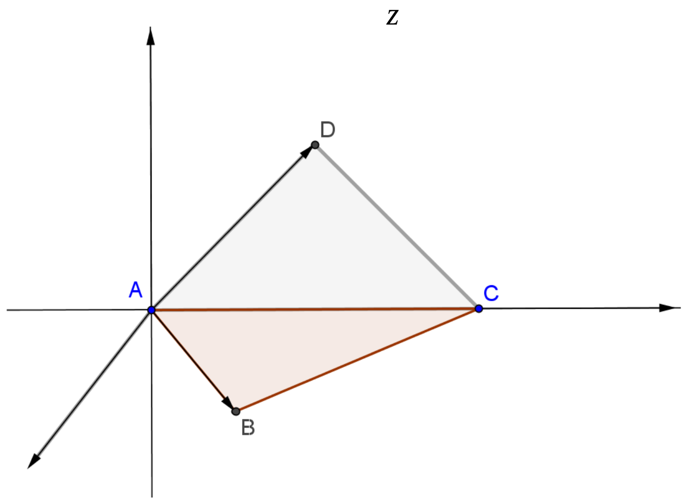
4. Dovendo compiere un viaggio in macchina, Tizio ha programmato di tenere la velocità di 90 km/h in tutto il percorso. Tuttavia, a causa del traffico, nella prima ora riesce a tenere solo la media di 75 km/h. Di quanti minuti è in ritardo Tizio rispetto ai suoi programmi? Per quanti kilometri deve tenere la velocità di 120 km/h per recuperare il ritardo?

[*risposte*: 10 minuti; 60 km]

5. Sia ABCD un quadrato, realizzato in cartoncino; lo si pieghi lungo la diagonale AC, in modo che i piani su cui giacciono i triangoli ABC e CDA siano perpendicolari. Qual è l'ampiezza dell'angolo formato dai segmenti AD ed AB?

La risposta alla domanda non è immediata: la formulazione del problema non permette di applicare direttamente una formula. Richieste di questo tipo hanno acquisito un'importanza crescente negli ultimi anni (prove Invalsi, indagine PISA, esame di Stato a conclusione del Liceo Scientifico).

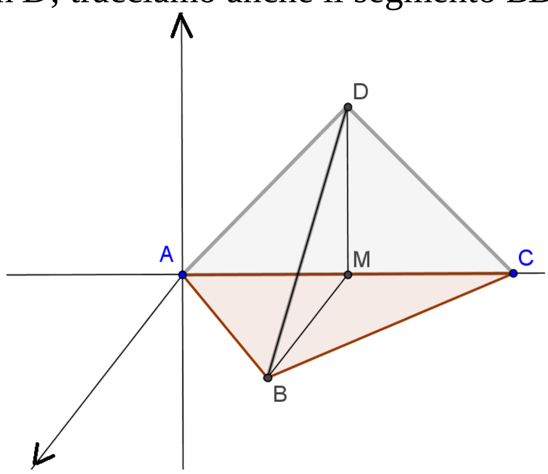
Prima risoluzione. Vettori in $\mathbf{R}^3$. Fissiamo un riferimento cartesiano ortogonale con l'origine nel vertice A del quadrato, l'asse y lungo la diagonale AC del quadrato, e scegliamo gli assi x e z in modo che i due triangoli che si ottengono con la piegatura del quadrato giacciano sui piani xy ed yz.



Fissiamo poi l'unità di misura in modo che il vertice C abbia coordinate (0, 2, 0). Le coordinate degli altri vertici del quadrato dopo la piegatura sono $B = (1, 1, 0)$ e $D = (0, 1, 1)$. A questo punto, per determinare l'ampiezza dell'angolo DAB basta considerare i due vettori AD, AB e il loro prodotto scalare $\langle AD, AB\rangle$. Infatti, da un lato vale la formula $\langle AD, AB\rangle = \|AD\| \cdot \|AB\| \cdot \cos DAB$; dall'altro è noto che per calcolare il prodotto scalare di due vettori basta fare la somma dei prodotti delle coordinate omonime (A è l'origine del riferimento).
La norma di ciascuno dei due vettori è uguale a $\sqrt{2}$; quindi si ha:
$\langle AD, AB\rangle = 1\cdot 0 + 1\cdot 1 + 0\cdot 1 = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot \cos DAB$
da cui si conclude $\cos DAB = 1/2$ cioè $DAB = 60°$.

Seconda risoluzione. Il problema si può risolvere con *metodi elementari*, senza ricorrere al prodotto scalare di vettori. Consideriamo il punto medio M della diagonale AC e congiungiamolo con B e con D; tracciamo anche il segmento BD.

Confrontiamo ora i tre triangoli rettangoli DMA, DMB, BMA: in ciascuno dei tre triangoli i cateti hanno lunghezza unitaria (metà della lunghezza della diagonale del quadrato). Quindi i tre triangoli sono uguali e, di conseguenza, sono uguali anche le loro ipotenuse AD, DB, BA. In conclusione, il triangolo ADB è equilatero e ciascuno dei suoi angoli ha ampiezza di 60°.



di fronte a un test

Raccomandazioni generali. Attenzione ai tempi (quante sono le domande?)

Leggere tutte le alternative di risposta. Una strategia utile in certi casi è: scartare alcune risposte e poi scegliere a caso. Cercare, ove possibile, una soluzione rapida, senza perdersi in calcoli non necessari

Documentarsi sulle prove assegnate negli anni precedenti

`www.testingressoscienze.org/`

Sapere che cosa ripassare, saper riconoscere concetti e metodi fondamentali.

1. Qual è la negazione di «tutti i numeri dispari sono primi»?

A) tutti i numeri pari sono primi

B) nessun numero dispari è primo

C) esiste un numero pari primo

D) esiste un numero dispari che non è primo

2. **(***dal test* TFA 2014 - A048). Mario percorre il tragitto da casa al lavoro in macchina o in motocicletta. Può confutare l'affermazione "se piove, Mario non va al lavoro in motocicletta" chi ha visto Mario andare al lavoro

A) in macchina in un giorno in cui non pioveva

B) in macchina in un giorno in cui pioveva

C) in motocicletta in un giorno in cui pioveva

D) in motocicletta in un giorno in cui non pioveva

3. Qual è la negazione della frase: «almeno tre studenti della classe sono lombardi»?

(A) al massimo due studenti della classe sono lombardi

(B) più di due studenti della classe sono lombardi

(C) almeno quattro studenti della classe sono lombardi

(D) in questa classe non ci sono studenti lombardi

4. Qual è la negazione della frase: "Ogni alunno ha almeno una cartella"?

(A) Nessun alunno ha una cartella

(B) Almeno un alunno ha una cartella

(C) Almeno un alunno è senza cartella

(D) Nessuna delle risposte precedenti è esatta

5. Non c'è nessun giornalista che non sappia l'inglese. Nel mio condominio c'è un giornalista. Di conseguenza, nel mio condominio:
A) tutti sanno l'inglese;
B) nessun sa l'inglese;
C) non c'è nessuno che non sappia l'inglese;
D) c'è almeno uno che sa l'inglese;
E) c'è almeno uno che non sa l'inglese.

6. (*dal test d'ingresso alla SSIS* 2007)
La negazione della frase “tutti sono ricchi e almeno uno non è felice” è
A) “nessuno è ricco e almeno uno è felice”
B) “qualcuno è ricco o nessuno è felice”
C) “qualcuno non è ricco o tutti sono felici”
D) “esiste almeno uno non ricco e felice”
E) “nessuno è ricco e nessuno è felice”

7. Qual è la negazione del proverbio «chi dorme non piglia pesci» ?
A) chi non dorme piglia pesci
B) chi dorme piglia pesci
C) c'è qualcuno che non dorme e non piglia pesci
D) c'è qualcuno che dorme e piglia pesci
E) se una persona non dorme, piglia pesci

8. Che cosa possiamo concludere a partire dalle due premesse seguenti?
- qualche multiplo di 3 è multiplo di 4
- nessun multiplo di 4 è dispari

(NB: si parla di una deduzione formale, che non dipenda dal significato di proprietà come multiplo di 3 o di 4. Ci si riconduce ad un sillogismo: da "qualche A è B" e "nessun B è C" si deduce "qualche …".)

9. (*Dalla prova per le borse* INdAM 2007) In un vecchio libro è stato trovato il quesito che segue. Purtroppo, la pagina è rovinata e la domanda è in gran parte illeggibile. Abbiamo sostituito la parte illeggibile con [...]. Sono rimaste solo poche parole, ma, tenendo presente che *una sola* delle risposte è corretta, è possibile stabilire di quale risposta si tratta.
«Se x ed y sono due numeri positivi tali che [...], che cosa si può concludere?».

A $x > y$ B $x > 2y$
C $x > y^2$ D $x^2 > y^2$
E $x^2 > 2y^2$

LINGUAGGIO MATEMATICO DI BASE

1. L'espressione $\left(\sqrt{1000}\right)^3$ è uguale a

   A. 10^5
   B. $100\sqrt{10}$
   C. $10\sqrt{1000}$
   D. $10^4\sqrt{10}$
   E. 10^4

2. Quante soluzioni ha l'equazione $(x^2 - \pi)(x^2 - 1) = 0$?

   A. 4
   B. 2
   C. 1
   D. 0
   E. 3

3. Sappiamo che tre numeri positivi T, ℓ, g sono legati dalla relazione

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

   Quale delle espressioni seguenti è uguale a g, se $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$?

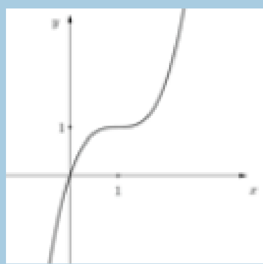
   A. $\dfrac{\ell}{\omega}$
   B. $\dfrac{\ell}{\omega^2}$
   C. $\omega^2\ell$
   D. $\dfrac{\omega}{\ell}$
   E. $\omega\ell$

10. Siano a, b due numeri diversi da zero e diversi fra loro. L'espressione $a^{-1} - b^{-1}$ è uguale a

A. $(a - b)a^{-1}b^{-1}$
B. $(b - a)a^{-1}b^{-1}$
C. $(a - b)^{-1}$
D. $(b - a)^{-1}a^{-1}$
E. $(a - b)^{-1}b^{-1}$

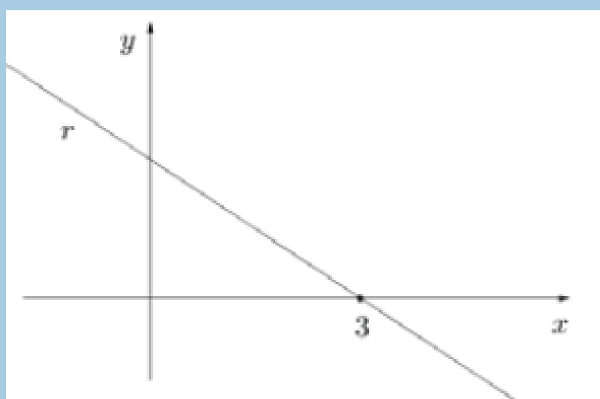
11. In figura è rappresentato il grafico di una delle seguenti funzioni. Quale?

A. $x^3 - 1$
B. $(x - 1)^3 + 1$
C. $(x + 1)^3 - 1$
D. $(x - 1)^3 - 1$
E. $x^3 + 1$



12. In figura è rappresentato parte del grafico di una retta r. Sapendo che la retta passa per il punto Q = (−9, 8) (che è fuori dalla figura), quanto vale l'area del triangolo compreso fra la retta r e gli assi?

A. 3
B. 6
C. $3\sqrt{2}$
D. 2
E. $2\sqrt{2}$



test di ammissione a *Psicologia*, Sapienza (Roma), 2015

Il test comprendeva 70 domande, di cui le prime 20 del tipo seguente.

1. Quale è il numero che sostituisce il punto interrogativo?

3	*		*	?	18
+		+		+	
5	*	2	*	?	20
+		+		+	
6	*	4	*		24
14		9		5	

(sbagliata) [ ] A) 8
(sbagliata) [ ] B) 4
(giusta) [X] C) 2
(sbagliata) [ ] D) Nessuno di questi
(sbagliata) [ ] E) 6

2. Quale è il numero che sostituisce il punto interrogativo?

24	+	7	-	5	26
-		*		-	
	*		+		?
/		/		*	
21	/	7	+	2	5
23		1		3	

(sbagliata) [ ] A) Nessuno di questi
(sbagliata) [ ] B) 25
(giusta) [ ] C) 22
(sbagliata) [ ] D) 13
(sbagliata) [ ] E) 16

Poi c'erano altre 15 domande del tipo seguente.

27. Data la sequenza di coppie di numeri: (42, 41), (39, ?), (36, 49), (?, 53), quali sono i numeri mancanti da sostituire al punto interrogativo?
(sbagliata) [ ] A) 36, 49
(sbagliata) [ ] B) 42, 44
(sbagliata) [ ] C) 54, 63
(sbagliata) [ ] D) 49, 46
(giusta) [ ] E) 45, 33

28. Data la sequenza di numeri: 11, 12, ?, 20, 27, 36, ?, 60, 75, quali sono i numeri mancanti da sostituire ai punti interrogativi?
(sbagliata) [ ] A) 14, 46
(sbagliata) [ ] B) 14, 47
(giusta) [ ] C) 15, 47
(sbagliata) [ ] D) 15, 49
(sbagliata) [ ] E) 16, 48

dal test di ammissione a Scienze Politiche

21. Nessuna pianta ha le ali. Tutti gli alberi sono piante. Dunque __ ha le ali. Quale frase completa in modo corretto il sillogismo?
A) Nessuna pianta;
B) Qualche albero;
C)* Nessuno albero;
D) Ogni pianta.

23. Se è vero che “il riso abbonda sulla bocca degli sciocchi”, sarà necessariamente vera una delle affermazioni seguenti:
A) tutti quelli che ridono sono sciocchi;
B) per diventare intelligenti basta ridere poco;
C)* una persona intelligente non ride troppo;
D) tutti quelli che non ridono sono intelligenti.